

文章编号: 1007-2934(2019)01-0039-04

# 利用“万有引力场的高斯定理”计算地球表面某处的重力加速度

胡婧<sup>1</sup>, 席特<sup>1</sup>, 蔡金平<sup>1</sup>, 赵多晋<sup>1</sup>, 鲁同所<sup>1,2\*</sup>

(1. 西藏大学, 西藏 拉萨 850000; 2. 中国科学院上海应用物理研究所, 上海 201800)

**摘要:** 通过量子理论推导及类比电场来建立引力场高斯定理的概念, 并根据布伦地球密度分布模型及受力情况分析得出地球表面某处的重力加速度计算公式, 为重力加速度的理论计算提供了一种全新的思路和方法, 对误差可能产生的来源也做了相关分析和探讨。

**关键词:** 高斯定理; 重力加速度; 地球密度分布; 万有引力

中图分类号: O 302 文献标志码: A DOI: 10.14139/j.cnki.cn22-4228.2019.01.009

在地球重力场中, 一切物体受重力作用, 不同地区同一物体所受的重力并不相同, 重力加速度也不相同。它与所在地区的海拔高度及纬度、地球运动、地壳活动状况都有密切的关系。重力加速度是物理学中重要的物理量之一, 测定它的量值对空间科学、地理学、测量学、天文学、气象学等学科具有重要的意义, 自1590年伽利略巧妙的利用斜面实验测定了重力加速度 $g$ 以来, 许多科学家相继使用不同方法测定重力加速度的值, 以期丰富测量方法及提高其准确度。如单摆法、自由落体法、滴水法等相对传统的物理实验以及近些年利用高科技手段如智能手机、DIS系统、原子干涉仪等新颖的方法进行测量。本文在总结前人测量地球重力加速度思想方法的同时, 类比电场的高斯定理, 假想空间拥有引力线, 建立万有引力场下的高斯定理, 利用这一原理, 再根据布伦地球密度分布模型计算地球某处的重力加速度, 为重力加速度的理论计算提供了一种全新的思路和方法, 对培养学生的创新思维能力及对知识的迁移能力以及学生在今后的学习中的主动探索精神具有巨大的推动作用。

## 1 “引力场的高斯定理”

万有引力是自然界普遍存在的一种弱相互作用

, 任何两物体间均存在相互吸引力<sup>[1]</sup>。若将物体视为质点则两质点相互吸引力 $F_g$ 沿两质点的连线作用, 与两质点的质量 $M$ 及 $m$ 成正比, 与它们之间的距离 $r$ 的平方成反比<sup>[2]</sup>。即

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

比例系数 $G$ 称为引力常量。推荐数值为 $G = (6.671 \sim 6.676) \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{M}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ <sup>[3-8]</sup>(见图1), 但是目前被认为最精确的值为 $6.674 184 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{M}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ 和 $6.674 484 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{M}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ <sup>[9]</sup>。

在量子力学中将传递引力间相互作用的媒介称为“引力子”, 它是自旋为 $a = 2$ , 质量为0的玻色子, 因此考虑到引力子的自旋性质后, 万有引力定律可写成下面的形式:

$$\vec{F}_g = (-1)^{a+1} \frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \quad (2)$$

若将质量为 $m$ 的小球放在引力场某处时, 它受到的引力为 $F_g$ , 则 $\frac{F_g}{m}$ 表示单位质量的质点在该点所受的引力叫做该点的引力场强度方向与 $\vec{F}_g$ 相同, 用 $E_g$ 来表示。

则引力场强度为:

$$\vec{E}_g = (-1)^{a+1} \frac{GM}{r^2} \vec{e}_r \quad (3)$$

对(2)进行面积分得:

收稿日期: 2018-10-28

基金项目: 国家自然科学基金(11747128, 11803024); 2018年大学生创新创业项目(2018XCX010)

\* 通讯联系人

$$\oiint_S \vec{E}_g \cdot d\vec{s} = (-1)^{a+1} \frac{1}{\varepsilon_0} M \left( \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi G} \right) \quad (4)$$

$$\text{即: } \oiint_S \vec{E}_g \cdot d\vec{S} = -4\pi GM \quad (5)$$

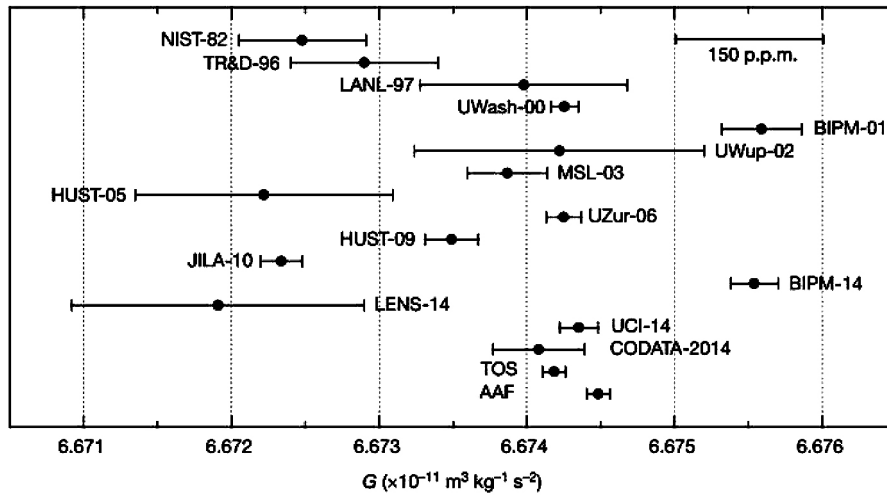


图1 国际上几个实验测到的  $G$  值及误差情况<sup>[9]</sup>

这里的  $\oiint_S$  表示沿一个闭合曲面  $s$  的积分, 习惯上叫它高斯面。此式为引力场高斯定理的一种表达方式。

实际上, 由于引力场与静电场都是有源场及保守力场, 万有引力公式及库伦公式都是平方反比定律, 而静电场的高斯定理是平方反比的必然结论。因此引力场的高斯定理也可以由静电场的高斯定理类比导出。静电场的高斯定理表述为: 电场中通过任一闭合曲面的电通量  $\Phi_E$  等于该面所包围的所有电荷电量的代数和  $\sum q_i$  除以  $\varepsilon_0$ , 与闭合面外的电荷无关<sup>[11]</sup>。用公式表述为:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} \quad (6)$$

类比为静电场的高斯定律, 引力场的高斯定律可表述为: 通过一个任意闭合曲面  $s$  的引力场强度的通量  $\Phi_{E_g}$  等于该曲面内所包含总质量  $M$  除以  $-\frac{1}{4\pi G}$ , 与闭合曲面外的质元无关<sup>[12]</sup>。用公式表述为:

$$\Phi_{E_g} = \oiint_S \vec{E}_g \cdot d\vec{S} = -4\pi GM \quad (7)$$

式中负号为了表明万有引力是吸引力。证明如下:

$$\vec{E}_g = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} \quad \text{若 } M \text{ 是连续体则 } \vec{E}_g = -G \iiint_V \frac{\rho \vec{r} dV}{r^3} \quad \text{即:}$$

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{E}_g \cdot d\vec{S} &= \oiint_S \left[ -G \iiint_V \frac{\rho \vec{r} dV}{r^3} \right] \cdot d\vec{s} = -G \iiint_V \left[ \oiint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{s} \right] \rho dV \\ &= -G \iiint_V \left[ \oiint_S \frac{d\cos\theta}{r^2} \right] \rho dV = -4\pi G \iiint_V \rho dV \end{aligned}$$

以上就是引力场中高斯定理的简单证明。

## 2 地球密度分布的布伦模型

由于地球内部结构为一同心状圈层构造是一个非匀质体, 各层物质成分、密度、温度各不相同<sup>[13]</sup>。因此, 地球并不是一个密度均匀的球体。我们在计算地球密度时应该考虑将地球分层进行计算。而确定地球圈层分界面的主要依据是地震波传播速度的主要变化。随着科学家用仪器观测地震波向中心传播时, 发现地震波传播情况与地内物质的状态有关, 根据它在地球内部传播时受到反射、折射和衰减的记录进行分析, 得出地球内部大致可分为三个组成物质和性质不同的同心圈层: 地壳、地幔、地核(内核、外核)<sup>[14]</sup>。各层的厚度为: 地壳 0~15 公里、地幔 15~3 000 公里、内核 3 000~5 000 公里、外核 5 000~6 370 公里。1970 年, 布伦根据实验结果推算估计出地球各圈层的密度(表 1):

表 1 地球各圈层的密度

地内圈层	深度/km	密度范围/(g/cm <sup>3</sup> )	物质状态
地壳	015	2.83	固体岩石
地幔	15~3 000	3.31~5.62	固体硅酸盐
外核	3 000~5 000	9.89~12.7	液体铁、镍等
内核	5 000~5 370	12.7~13.0	固体铁、镍等

依据此模型,我们将地球地壳、地幔、内核、外核分别用字母 A、B、C、D 表示。假设 A、B、C、D 四层的厚度分别为  $d_1$ 、 $d_2$ 、 $d_3$ 、 $d_4$ ,质量分别为  $m_a$ 、 $m_b$ 、 $m_c$ 、 $m_d$ 。

对于 A 层,布伦只给出了平均密度  $\rho_a$  则有:

$$m_a = \rho_a V_a = \rho_a \frac{4}{3} \pi (R - R_1)^3 [15]。对于 B、C、D 三$$

层可用以下计算方法:

根据表 1 取地球内任一薄层,半径从  $r$  变化到  $r+dr$ ,在该薄层内的密度可视为恒量  $\rho$ ,则该薄层的质量为  $dm = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr$ ,假设密度随深度

作线性变化,则有:  $\rho = \rho_2 - \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{R_1 - R_2} \right) (r - R_2)$

$\rho_1$ 、 $\rho_2$  为圈层上层密度和下层密度。 $R_1$ 、 $R_2$  为圈层外层半径和内层半径。则薄层的质量为

$$dm = \left( \rho_2 - \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{R_1 - R_2} \right) (r - R_2) \right) \cdot 4\pi r^2 dr$$

则 B、C、D 三层的任一质量为

$$m_i = \int_{R_2}^{R_1} \left( \rho_2 - \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{R_1 - R_2} \right) (r - R_2) \right) \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{4}{3} \pi \left[ \rho_2 (R_1^3 - R_2^3) - \frac{3}{4} \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{R_1 - R_2} \right) (R_1^4 - R_2^4) + R_2 \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{R_1 - R_2} \right) (R_1^3 - R_2^3) \right]$$

### 3 地球附近某处的重力加速度

假定地球附近某处有一个小球,如果该地不在赤道也不在两极上,比如拉萨市位于青藏高原的中部,地处东经  $91^\circ 10' 32''$ ,北纬  $29^\circ 38' 41''$ ,它的平均海拔是 3 660 米。则小球不仅受到重力,也受到由于地球自转产生的向心力的作用,我们对拉萨市的一个小球进行受力分析。(见图 2)

$$g = \sqrt{\left( G \frac{M}{(R+h)^2} \right)^2 + (\omega^2 (R+h) \cos\theta)^2} - 2G \frac{M}{(R+h)^2} \cdot \omega^2 (R+h) \cos\theta \cdot \cos\theta$$

### 4 误差可能的来源分析

在计算过程中,一般假定地球是一个规则球

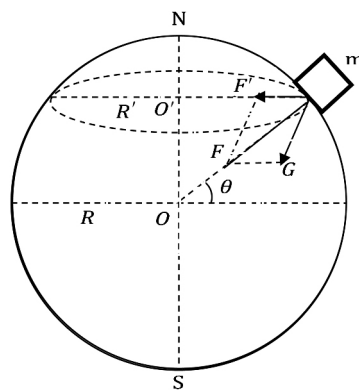


图 2 受力分析图

设地球的平均半径为  $R$ ,质量为  $M$ ,某地海拔高度为  $h$ ,拉萨在  $h = 3\,660\text{ m}$  处的小球距地心的距离为  $R+h$ ,则以地球为中心,  $R+h$  为半径作一高斯面。根据引力场的高斯定理有

$$\oint_S E_g \cdot dS = -4\pi G \iiint_V \rho dV = -4\pi GM \quad (8)$$

则在  $R+h$  处受到的引力场强度为

$$E_g \cdot 4\pi (R+h)^2 = -4\pi G \iiint_V \rho dV \quad (9)$$

则引力场强度为  $E_g = -\frac{G \iiint_V \rho dV}{(R+h)^2}$

则小球在拉萨受到的万有引力为

$$F = G \frac{m \iiint_V \rho dV}{(R+h)^2} = G \frac{mM}{(R+h)^2}$$

由于小球所受向心力是由地球自转产生的,所以小球所受到的向心力为

$F_{\text{向}} = m\omega^2 (R+h) \cos\theta$ ,该式中  $\omega$  为地球自转的角速度,  $\theta$  为拉萨的纬度。

在拉萨处小球受到的重力为:  $G = mg$

利用图 2 几何关系根据余弦定理可得:

$$(mg)^2 = \left( G \frac{Mm}{(R+h)^2} \right)^2 + (m\omega^2 (R+h) \cos\theta)^2 - 2G \frac{Mm}{(R+h)^2} \cdot m\omega^2 (R+h) \cos\theta \cdot \cos\theta$$

带入数值则有:

体,各部分半径一致,重力加速度随着纬度、经度的不同而变化,但实际上地球不是一个规则的球体,准确地说是一个两极稍扁,赤道略鼓的扁球体,地球的外部地形起伏多变这意味着在不同的

地方测量,其半径也不同,由于无法精确却测量地球表面某地(如拉萨)距离地心的半径,所以在计算过程中大多采用地球半径平均值进行计算,这样的取值必将引起误差。再者,由于地球内部情况复杂,再加上布伦的密度分布模型虽然设计的比较合理,非常接近真实值,但目前仍没有得到完全证实,此外,再受力分析时,为考虑自转及其他天体对物体的相互作用情况,这些都必然会对实验结果带来某种程度的影响,使得最终计算结果与测量结果还有一定偏差,但是从拉萨的计算结果来看差别不是很大。

#### 参考文献:

- [1] Andrade V C D, Pereira J G. Gravitational Lorentz Force and the Description of the Gravitational Interaction [J]. Ph.
- [2] Liu D. Gauss's Theorem of the Gravitation Field [J]. Journal of Gansu Education College, 1998, Physical Review D Particles & Fields, 1997, 56(8): 4689-4695.
- [3] Peter J. Mohr et al. "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constant: 2010" arXiv: 1203.5425 V1 [physics.atom-ph].
- [4] Lu Sen-Kai, Guo Yi-Ling & Shen Hui-Jun, CODATA recommended values of the fundamental physical constants-2006. 2008, Physics, 37(3): 183-191.
- [5] Gundlach, J. H. & Merkowitz, S. M. Measurement of Newton's constant using a torsion balance with angular acceleration feedback. 2000, Phys. Rev. Lett, 85(14): 2869-2872.
- [6] Luo, J, Liu Q, Tu L, et al. Determination of the Newtonian Gravitational Constant G with Time-of-Swing Method. 2009, Phys. Rev. Lett, 102(24): 240801.
- [7] Parks, H.V. & Faller J.E. Simple Pendulum Determination of the Gravitational Constant. 2010, Phys. Rev. Lett, 105(11): 110801.
- [8] Eugenie Samuel Reich, G-whizzes disagree over gravity. 2010, Nature (London), 466: 1030.
- [9] Li Q, Xue C, Liu J P, et al. Nature, 2018, 560(7720): 582.
- [10] 魏益焕. 引力场的高斯定理及应用 [J]. 渤海大学学报(自然科学版), 2018(2).
- [11] Wen N, Wang W. The deep research of the application about Gauss Theorem of electrostatic field [J]. Physics Bulletin, 2010(2): 605-608.
- [12] Hao L I. Gauss Theorem in the Gravitational Field to Calculate the Coal Gangue's Gravitation in the Coal Pits [J]. Journal of Shanxi Datong University, 2010.
- [13] Zharkov V N, Magnitskiy V A. The inner structure of the Earth. [J]. School of Oriental & African Studies, 1982, 64(21): 116-125.
- [14] Lister J R, Buffett B A. Stratification of the outer core at the core-mantle boundary [J]. Physics of the Earth & Planetary Interiors, 1998, 105(1/2): 5-19.
- [15] 傅承义. 地球的密度 [J]. 地球物理学报, 1954(1): 23-34.

## Using the Gauss Theorem of Gravitational Field to Calculate Gravity Acceleration at Some Place on the Earth's Surface

HU Jing<sup>1</sup>, XI Te<sup>1</sup>, CAI Jinping<sup>1</sup>, ZHAO Duojin<sup>1</sup>, LU Tong suo<sup>1, 2\*</sup>

(1. Tibet University, Tibet Lhasa 850000; 2. Shanghai Institute of Applied Physics, Chinese Academy of Science, Shanghai 201800)

**Abstract:** The concept of theorem for gravitational field is established through quantum theory and the analogy of electric field. The formula for calculating the gravity acceleration at some place on the earth surface is obtained according to the model of Bullen earth density distribution and the analysis of the forces. It provides a new idea and method for the theoretical calculation of gravity acceleration. Detailed analysis and discussion for the possible sources of error are also presented in this study.

**Key words:** Gauss theorem; acceleration of gravity; density distribution of earth; universal gravitation